オートノーマスなオートマトンの自己同型群と一様分解

その他（別言語等）のタイトル	On the Automorphism Group and the Uniform Decomposition of an Autonomous Automaton
著者	熊谷　幸雄
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	7
号	3
ページ	669-678
発行年	1972-09-15
URL	http://hdl.handle.net/10258/3543

オートノーマスなオートマトンの自己同型群と一様分解

熊 谷 幸 雄

On the Automorphism Group and the Uniform Decomposition of an Autonomous Automaton

Yukio Kumagai

Abstract

By R. J, Jump, it was shown that if an automaton has a non-triviae automorphism group, the automaton is uniformey decomposable, and is realizable by connecting iteratively in the sense that all of the component automaton are isomorphic.

This condition is, however, restrictive, and in fact, half the number of the automorphism groups of the automaton are trivial.

Therefore, this note deals with the automorphism group associated with the form of a permutation group, and investigetes the necessary and sufficient condition which gives a non-trivial automorphism group.

Moreover, this note presents a procedure which gives a non-trivial automorphsim group for all the automatons by the application of the state-splitting method.

は じ め に

近年に於ける半導体集積技術 (Integrated Circuit Technology) の進歩は著しい。そこでは，最早，従来の複雑な回路技術は，単に，集積化した素子の組合せの問題にされてしまう傾向がみられる。この立場から，謂ゆる情報変換器としてのオートマトンも，同一の基本素子を直列または並列に接続するだけの簡単な方法で構成しようとする研究が行なわれるようになり，オートマトンの一様分解の問題がとり上げられるようになった。

さて，J. R, Jump は，オートマトンが自明でない自己同型群をもつならば，オートマトンはこの群によって一様に分解可能であり，しかも，全く同型な形でつなぐことにより，もとのオートマトンを実現することができることを示した[1]。

しかし，オートマトンが自明でない自己同型群をもつことは，実際には，条件として可成り厳しいものであり，事実，オートノーマスなオートマトンでも約半数は自明な自己同型群しか有しない。

それ故，本稿は，オートマトンの自己同型群を置換群の形で求めることに主眼を置き，オ

ートマトンが自明でない自己同型群をもつための必要十分条件を探がし，同時に，状態分割の手法[2]を応用することにより，全てのオートマトンに対し自明でない自己同型群をもたせることのできることを示す。

本　　論

定義 1　オートマトン A を3変数対 $A=(S, I, \delta)$ で定義する。

ここで S は有限個の状態集合とし $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$

I はオートマトンに対する入力の記号集合

δ は $S\times I$ を S に写像する関数

である。

定義 2　オートマトン A が I としてただ1つの記号しか含まないとき，このオートマトンをオートノーマスなオートマトンと呼ぶ*。

定義 3　オートマトン A の状態集合 S から S への 1-1 写像 g で

$$g\,\delta(s, x) = \delta(g\,s, x) \qquad \text{for} \quad s\in S,\ x\in I$$

を満たすものをオートマトン A の自己同型写像と呼ぶ。

定理 1　(Fleck) 自己同型写像 g の集合は，積の演算のもとで群をなす[3]。

定義 4　定理1の群をオートマトン A の自己同型群と呼び，$G(A)$ とかく。

定義 5　オートマトン A の状態集合 S から S への 1-1 写像をオートマトン A の置換群と呼び，これを $S(A)$ とかく。

定義 6　オートマトン A において

$$\delta(s_i, x) = s_j \qquad \text{for } s_i, s_j\in S$$

としたとき，s_j を s_i の successor と呼ぶ。

定義 7　successor の集合を E, その S に対する補集合を N とする。

即ち,

$$E = \{s_j | \delta(s, x) = s_j \qquad \text{for } s\in S\}$$

$$N = S-E$$

定理 2　$S(A)$ の元 g が，自己同型群 $G(A)$ の元であるならば,

$$gs\in E \quad \text{for} \,\forall\, s\in E \qquad 或は \quad gs\in N \quad \text{for} \,\forall\, s\in N$$

である。

証　明　置換 g が $s_i\in E$ を $s_j\in N$ に写像する $G(A)$ の元であるならば，$s_j\in N$ から $s_i\in E$ に

* 以下オートマトンというときはオートノーマスなオートマトンを指す。

写像するものが g の逆元として $G(A)$ に含まれる。またgが $s_i \in N$ を $s_j \in E$ に写像する $G(A)$ の元であるならば，$s_j \in E$ から $s_i \in N$ に写像するものも g の逆元として $G(A)$ に含くまれる。よって定理1の命題は，$G(A)$ の元には E の元を N の元に写像するものが含くまれていないことを示せば十分である。

今 g を $g\delta(s,x) \in N$ とする元とすると，全ての $s \in S$ に対して $\delta(s,x) \in E$ であるから，このときの g は，E の元を N の元に写像するものである。

一方 g は S 上の1-1写像であるから

$$\delta(gs,x) \in E \qquad \text{for all } s \in S.$$

E と N には共通な元が含まれない故，このような g である限り $g\delta(s,x) \neq \delta(gs,x)$ である。従って g は自己同型群の元にはなり得ない。

この定理の命題は，次のように言い換えてもよい。

系 1-1　オートマトンの自己同型群 $G(A)$ は，E と N を保存する。

系 1-2　オートマトンの自己同型群 $G(A)$ の可遷類は，E または N のいずれか一方に含くまれる。

定義 8　$E=\{s_1, s_2 \cdots s_l\}$，$N=\{s_{l+1}, \cdots, s_2\}$ とする。

$s_i \in E$, $s, s' \in S$ に対して $s\Re s' \Leftrightarrow \delta(s,x)=\delta(s',x)=s_i$ として関係 $\Re$ を定義すると，$\Re$ は同値関係となり $S/\Re$ は同値類を作る。いまこれを $\{A_i\}$ $i=1,2\cdots l$ とかくと，$A_i=\{s|\delta(s|x)=s_i \text{ for } s \in S\}$ である。このとき，A_i を successor を s_i とする同値類と呼ぶことにする。

定義 9　N と A_i との交わりを B_i とする。

即ち　$N \cap A_i = B_i \qquad \text{for } i = 1 \sim l$

補題 1　B_i は N を互いに共通部分のない高々 l 個の部分集合に分割する。

証　明　$\forall A_i, A_j \subset \{A_i\}$ に対して

$$A_i \cap A_j = \phi \text{ for all } i, j.$$

故に　$B_i \cap B_j = \phi$ for all i, j.

一方，$\cup_{i=1}^{l} A_i = S$ であるから N の元は必ずどこかの A_i に含くまれ，したがって $\cup B_i = N$ である。その時の添字 i の最大値は l である。

定義 10　S-E の元は全て固定し E 上の元のみを置換する可遷群を G_E

S-N の元は全て固定し N 上の元のみを置換する可遷群を G_N

S-A_i の元は全て固定し A_i 上の元のみを置換する可遷群を G_{A_i}

S-B_i の元は全て固定し B_i 上の元のみを置換する可遷群を G_{B_i}

と定義する。

そのとき，まず N の構造を調べることによって次の定理を得る。

定理 3　G_{B_i} は自己同型群 $G(A)$ の部分群を作る。

証　明　$G_{B_i} \in g$ とする。$B_i \in s$ とすると明らかに $s \in A_i$。よって $\delta(s, x)=s_i$。g は B_i 上の置換であるから，$gs \in B_i$。つまり $gs \in A_i$，故に $\delta(gs, x)=s_i$.

一方，$s_i \in E$ であり，g は E の元は全て固定する故，$gs_i=s_i$.

従って　$\delta(gs, x) = s_i = gs_i = g\delta(s, x)$　for $s \in B_i$

故に　$g \in G(A)$

である。

系 3-1　$\Pi_{i=1}^{l} G_{B_i}$ も自己同型群 $G(A)$ の部分群である。

証　明　G_{B_i} は $i=1\sim l$ について全て $G(A)$ に含くまれる。従ってそれらの積 $\prod_{i=1}^{l} G_{B_i}$ も $G(A)$ に含くまれる。

定理 7　N が B_i による分割で，２個以上の元をもつ部分集合を少なくとも１つ有するならば，オートマトン A は自明でない自己同型群 $G(A)$ をもつ。

証　明　系 3-1 において，B_i が全ての i について１個若しくは空な元からなっているとすると，そのとき各 G_{B_i} は恒等的な置換元しか有しない。よって明らか。

定理３によって，我々は，E の構造とは無関係にまず N の構造を調べることにより，それが自明でない自己同型群を有する条件を知ることができた。ここで，無関係にとしているのは，定理１の結果からいえることである。

さて，次に，E の構造を調べてみることにする。E の各元には，これを successor とする同値類が一意に対応しており，且つ，その同値類には，E の元と N の元が混在しているから，まず之等を分離する必要がある。

定義 11　$A_i - B_i = A_i^E$　for $i=1\sim l$ とする。

明らかに $A_i = B_i + A_i^E$，$U_{i=1}^{l} A_i^E = E$，$A_i^E \cap B_i = \phi$ for all i である。

定義 12　$s_i, s_j \in E$ に対して，s_i を successor とする同値類を A_i，s_j を successor とする同値類を A_j とする。このとき，置換 g；$s_i \to s_j$ が，A_i の全ての元を同時に A_j の全ての元に置換し，または，g が A_i の全ての元を A_j の全ての元に置換するとき，同時にそれが s_i と s_j の置換 g をほどこすならば，この置換 g を両立する置換と呼ぶ。

補題 2　置換 g が両立するためには，同値類 A_i，A_j の濃度の等しいことが必要である。

証　明　g は全ての元を 1-1 に対応させるものであるから，g の定義域と値域は等しい個数をもたねばならない。つまり A_i，A_j の濃度の等しいことが之等の置換を可能にする必要な条件となっている。

補題２の対偶をとることにより次のことは明らか。

補題 3　s_i，s_j を successor とする同値類を各に A_i，A_j とするとき，若し A_i，A_j の濃度が異るならば，両立する置換 g を見いだすことはできない。

補題 4　両立する置換 g が，自己同型群 $G(A)$ の元であるならば，g は G_E と G_N の積によって作られる置換群の部分群に属する。

証　明　定理2により，自己同型群 $G(A)$ は E と N を不変に保つ。ところで定義11により $A_i=A_i^E+B_i$, $A_j=A_j^E+B_j$ であるから，両立する置換 g が自己同型群 $G(A)$ のものであるなら，A_i^E, A_j^E と B_i, B_j の置換のみが許される。明らかにこれは $G_E\times G_N$ の部分群をつくる。

補題2と補題4より次のことがいえる。

補題 5　両立する置換 g が自己同型群 $G(A)$ の元となるためには，A_i^E と A_j^E，且つ B_i と B_j の濃度が，各々，等しいことが必要である。

また，補題4の証明の結果より次のことがいえる。

補題 6　両立する置換 g が自己同型群 $G(A)$ の元であるならば，g は置換群 $(s_is_j)\times(A_i^EA_j^E)\times(B_iB_j)$ の元である。ただしここで $(A_i^EA_j^E)$, (B_iB_j) と各々集合 A_i^E, A_j^E, B_i, B_j に属する元の置換を表すものとする。

さて，以上の補題から，E と $\{A_i\}$ の構造と，自己同型群 $G(A)$ の構造とを結びつける主要な定理がつくり上げられる。

定理 5　置換群 $S(A)$ の元 g が，自己同型群 $G(A)$ の自明でない元となるための必要十分条件は，g が $G_E\times G_N$ に属し，且つ，同値類の濃度を等しくする少なくとも1組の E の元 s_i, s_j が存在しそこで g が両立すること，である。

証　明　まず $g\in G(A)$ とする。そのとき $g\in G_E\times G_N$ は補題4により明らか。

同値類の濃度が，全て異るものとすると，補題3より g を両立させることはできない。従って E の全ての元についての置換は許されないのでそのときの E についての $G(A)$ は自明なものだけとなる。

それ故，いま，同値類の濃度を等しくする1組の successor の元 s_i, s_j が存在するものとし，g によって $s_i\to s_j$ とする。補題5を考慮に入れると，

$$g\in G(A)$$

であるから

$$\exists s_{ip}\in A_i^E|g\,s_i=g\,\delta(s_{ip},x)=\delta(g\,s_{ip},x).$$

一方　$\exists s_{jp}\in A_j^E|\,g\,s_i=s_j=\delta(s_{jp},x)$

故に　$\delta(g\,s_{ip},x)=\delta(s_{jp},x).$

s_{ip}, s_{jp} は，A_i^E, A_j^E について任意でよいから，結局 g によって A_i^E の全ての元は A_j^E の全ての元に置換される。B_i, B_j についても同様である。

逆に，g によって，$\forall s_{ip}\in A_i^E$ が $s_{jp}\in A_j^E$ に置換されたとすると，

$$\delta(g\,s_{ip},x)=\delta(s_{jp},x)=s_j.$$

一方　$g \in G(A)$ であるから，$\delta(g\, s_{ip}, x) = g\, \delta(s_{ip}, x) = g\, s_i$.

つまり　$g\, s_i = s_j$.　B_i, B_j についても同様である。

従って，同時に s_i が s_j に置換され，g の両立することが示された。

今度は，逆に，$g \in G_E \cdot G_N$，かつ，濃度の等しい同値類 A_i, A_j で successor s_i, s_j と両立するものとする。

そのとき，$\forall s_{ip} \in A_i^E$ に対して $\exists s_{jp} \in A_j^E \mid g\, s_{ip} = s_{jp}$.

故に　$g\, \delta(s_{ip}, x) = g\, s_i = s_j = \delta(s_{jp}, x)$.

つまり　$g\, \delta(s_{ip}, x) = \delta(s_{jp}, x) = \delta(g\, s_{ip}, x)$.

故に　$g \in G(A)$ である。

定理5の結果より，自己同型群 $G(A)$ には，定義12で定義した両立する置換 g の性質が，極めて重要な役割を演じていることが分かる。ところで，定義8から明らかなように，同値類 A_i の元は，また1つの successor となり，それは，また別の1つの同値類をつくってゆくから，両立する置換 g が，全体としてどのようになるか，もう少し詳しく調べてみることにする。それ故，successor の集合 E に，また新しい次の同値関係を定義する。

定理 13　$\forall s_i, s_j \in E$ として　$s_i \equiv s_j (\mathfrak{R}_c) \Leftrightarrow \sharp|A_i| = \sharp|A_j|$　for $i, j = 1 \sim l$.

ただし，$\sharp|x|$ は，集合 x の濃度を示すものとする。

そのとき，E は successor の同値類の濃度を等しくする successor の同値類に分けられる。いま，これを $\{C_r\}$ とかく。

このとき，次の定理が成立する。

定理 6　置換 g が，両立し，且つ，自己同型群 $G(A)$ の元になりうるのは，同値類 $\{C_r\}$ において，2個以上の元からなる同値類 C_r が少なくとも1つは存在して，その C_r に含くまれる successor のみによって，それを successor とする同値類の E の成分が構成されているか，巡回的になっている場合に限る。

証　明　定理の前半は，定理5より明らか。後半のみを問題にする。

2個以上の元を含くむ同値類を $C_{r1}, C_{r2}, \cdots$ とし，その元，つまり，successor を各々 $\{s_i^{r1}\}$，$\{s_i^{r2}\}, \cdots$，この元を successor とする同値類を $A_i^{r1}\}$，$\{A_i^{r2}\}, \cdots$ E 成分を $\{A_i^{E(r1)}\}$，$\{A_i^{E(r2)}\}, \cdots$ とする。いま，両立する $G(A)$ の置換 g が存在するものとして，g は，s_i^{r1}，$s_j^{r1} \in C_{r1}$，$s_{ip}^{r1} \in A_i^{E(r1)}$，$s_{jp}^{r1} \in A_j^{E(r2)}$ の間を問題にしているものとする。そのとき，s_{ip}^{r1}, s_{jp}^{r1} が，C_{r1} の元ではなく，他の $\{C_r\}$ の元，例えば，C_{r2} の元であるとすると，g が (s_i^{r1}, s_j^{r1}) と $(s_{ip}^{r1}, s_{jp}^{r1})$ の間で両立することは，C_2 の successor としての s_{ip}^{r1}, s_{jp}^{r1} と $s_{iq}^{r2} \in A_i^{E(r2)}$，$s_{jq} \in A_j^{E(r2)}$ の間で両立することと等価である。従って，$\{A_i^{E(r1)}\}$ の成分のつくる元に，他の C_r の元が含くまれているとすると，最初に問題とされる g は，C_r の元の対と，それを successor とする同値類の対に含くまれる元の対の間を，

等価な問題として次々に移ってゆくことになる。ところが $\{C_r\}$ 或いは $\{A_i^{E(r)}\}$ は有限な個数しか含くまないから，この移り方は，それを等価な問題としなくなるか，或いは，或る同値類同志で周期的になるかのいずれかである。前者の場合には，選ばれる元の対が異る C_r にまたがる場合であり，之れは不合理である。後者の場合，周期的になる同値類を C_{ri}, C_{rj} (一般性を失わずに $i<j, i\neq 1$ とできる) とすると，これは j 番目に選ばれた successor の対が C_{rj} に属し，その successor を successor とする同値類から選んだ元の対が，C_{ri} の successor 対になっていることを示す。ところが C_{ri} のその successor 対は，$C_{r(i-1)}$ の同値類の successor でもあった。つまり C_{ri} の元を successor 対とする2つの同値類 $\{A^{rj}\}\{A^{r(i-1)}\}$ が存在することになる。これは $\{A_i^E\}$ が全て異る元によって構成されているという事実に矛盾する。よって不合理である。しかし，$i=1$ として周期的になる，つまり巡回的になる場合には，この不合理は除去される。

次に，若干の特別な形のオートマンについて考察してみる。

置換群の元は，全て2項巡環または3項巡環の形で表現されるので，このような形の置換を自己同型群としてもつオートマトンの条件を調べてみる。

系 6-1　$s_i, s_j \in E$ について　$g=(s_i, s_j)$ が唯一の自明でない自己同型群 $G(A)$ の元となるのは，C_r が s_i, s_j を元としてもつ唯一の自明でない類であり，$B_i=B_j=\phi$, A_i^E, A_j^E に各々 s_i, s_j が1つづつ含くまれている場合である。ここで自明な類とは，ただ1つの元からなる類をいう。

証　明　定理6より2個の元 s_i, s_j よりなる唯一の C_r が存在し，かつこの元を successor とする同値類 A_i^E, A_j^E は，濃度が等しく，C_r と同じ元であるから，$g=(s_i, s_j)$ は，両立する置換であり，$B_i=B_j=\phi$ であるから自己同型群 $G(A)$ の自明でない唯一の元である。

系 6-2　$s_i, s_j, s_k \in E$ について　$g=(s_i, s_j, s_k)$ が唯一の自明でない自己同型群 $G(A)$ の元となるのは，s_i, s_j, s_k が $\{C_r\}$ の同一の類 C_r に属し (他の類は自明な類)，$B_i=B_j=B_k=\phi$, A_i^E, A_j^E, A_k^E が，s_i, s_j, s_k をこの順に巡環的に1つづつ含む場合である。

証　明　例えば　$A_i^E=\{s_k\}$, $A_j^E=\{s_i\}$, $A_k^E=\{s_j\}$ とすれば，これは，successor s_i, s_j, s_k の置換 $g=(s_i, s_j, s_k)$ と両立し，他の条件より自己同型群 $G(A)$ の元である。

定義 14　$N=\phi$ とするオートマトンを置換オートマトンと呼ぶ。

定理 7　置換オートマトンは，必ず自明でない自己同型群 $G(A)$ をもつ。

証　明　$N=\phi$ であるから　$B_i=\phi$ for all i.　　故に，$A_i^E=A_i$ for all i.

$\cup A_i^E=\cup A_i=S$, かつ A_i^E は互いに交わりをもたないから，A_i^E は全ての i についてただ1つの元からなる。それ故 $\{C_r\}$ は，ただ1つの類 C_r からなりたち，$C_r=S=\cup A_i^E$ である。故に，定理6より，必ず自明でない自己同型群が存在する。

注　系6-2で s_i, s_j, s_k が巡環的でない場合には，$g=(s_i, s_j, s_k)$ は $G(A)$ の元とはならないが，定理6の条件は，全て満足しているので自明でない自己同型群が存在しなければならないが，この場合には，明らかに，2項巡還の形の置換が，それになる。

定義 15　Eを，ただ1つの元とするオートマトンをリセットオートマトンと呼ぶ。

定理 8　リセットオートマトンは，必ず自明でない自己同型群 $G(A)$ をもつ。

証　明　Eは，ただ1つの元であるから $\{A_i\}$ はただ1つの同値類 A_1 からなる。Sをn個の元とすると，Nは $(n\text{-}1)$ 個の元を含み，$A_1 \cap N = B_1$ とすると，$A_1 = S$ であるから，$B_1 = N$ となり，従って，定理4より，自明でない自己同型群 $G(A)$ が存存する。

置換オートマトンに関する定理7の結果から，次のことが明らかとなる。

定理 9　オートマトン A が自明な自己同型群 $G(A)$ しか有しないとすると，そのとき，オートマトン A は，Nをϕとはしない。

つまり，自明な自己同型群しかもたないオートマトンとすると，それらについて共通して言えることは，Nが，少なくとも1つの元を含むということである。さて，この性質を利用することにより，定理10の命題を証明することができる。

定義 16　オートマトン $A=(S, I, \delta)$ とオートマオン $A'=(S', I, \delta')$ とが，$S \subset S'$ として，互いに等価であるとは，次の場合を言う。

$^\forall s \in s$, $^\forall s' \in s$ に対して　$\delta'(s', x)=\delta(s, x)$ for $x \in I$ として δ' をさだめるとき，$f(s')=s$ とする S' から S 上への準同型写像 f が存在する場合。

定義 17　2つのオートマトン $A=(s, I, \delta)$ と $A'=(S', I, \delta')$ において，$S \subset S'$ とし，$S \in s$ に対して S' の元 $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n$ が，準同型写像 f のもとに対応するとき，s は $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n$ に状態分割されると言う。

定理 10　自明な自己同型群 $G(A)$ しかもたないオートマトンは，適当に状態分割することにより，自明でない自己同型群 $G(A)$ をもたせることができる。

証　明　オートマトンを $A=(S, I, \delta)$ とし，自明な自己同型群 $G(A)$ しか有しないものとする。そのとき，定理9より，オートマトン A は，空でない N をもつ。いま，その元を，$N=\{s_{l+1}, s_{l+2}, \cdots, s_n\}$ とする。勿論，N の元は，定理4の条件を満足せず，オートマトンとして定理5の条件も満足していないものとする。明らかに，$S-N=\{s_1, s_2, \cdots, s_l\}$ の元を successor とする同値類 $\{A_i\}$ と N の交わり $\{B_i\}$ は，N の分割で，空かまたは単一の元よりなる。いま，それを，一般性を失うことなく $B_i=\{s_{l+j}\}$, $s_{l+j} \in N$ for $i=1\sim l$, j は $1\sim n$ の勝手な数とする。

そこで，オートマトン A' を，$A'=(S', I, \delta')$ とし，S', δ' を次のように定める。

$$S' = \{s'_1, s'_2, \cdots s'_l, s^1_{l+1}, s^2_{l+1}, \cdots s^{n_{l+1}}_{l+1}, s^1_{l+2}, s^2_{l+2}, \cdots, s^{n_{l+2}}_{l+2}, \cdots, s^1_n, s^2_n, \cdots s^{n_n}_n\}$$

$$\begin{aligned}
\delta'(s'_i, x) &= \delta(s_i, x) && \text{for } i = 1\sim l, \\
\delta'(s^i_{l+1}, x) &= \delta(s_{l+1}, x) && \text{for } i = 1\sim n_{l+1}, \\
\delta'(s^i_{l+2}, x) &= \delta(s_{l+2}, x) && \text{for } i = 1\sim n_{l+2} \\
&\ \ \vdots \\
\delta'(s^i_n, x) &= \delta(s_n, x) && \text{for } i = 1\sim n_n.
\end{aligned}$$

そのとき，準同型写像 f，即ち

$$
\begin{aligned}
&f(s_i') = s_i && \text{for } i = 1\sim l,\\
&f(s_{l+1}^i) = s_{l+1} && \text{for } i = 1\sim n_{l+1},\\
&f(s_{l+2}^i) = s_{l+2} && \text{for } i = 1\sim n_{l+2}\\
&\quad\vdots\\
&f(s_n^i) = s_n && \text{for } i = 1\sim n_n
\end{aligned}
$$

は，明らかに，S' から S 上への準同型写像である。

つまり，オートマトン A と A' は，互いに等価であり，S の元は S' の元に状態分割されている。

ところで，j を $1\sim n$ の勝手な数として，$s_{l+j}\in B_i$ for $i=1\sim l$ としているから，$\delta(s_{l+j}, x) = s_i$. よって，オートマトン A' では，

$$\delta'(s_{l+j}^i, x) = \delta(s_{l+j}, x) = s_i = s_i' \qquad \text{for all, } i, l.$$

故に　S' の元のうち，$s_1', s_2', \cdots, s_l'$ は E の元に，残りは N の元に相当する。また，$\{s_{l+j}^i\}$ $i=1\sim n_{l+j}$ は，s_i' を successor とする同値類と N との交わり B_i に相当するが，明らかなように，これは，最早，単一の元ではない。

従って，定理2と定理4の結果より，オートマトン A' の自己同型群 $G(A')$ は，自明な自己同型群ではありえない。

あとがき

オートマトンの自己同型群による一様分解の方法を，全てのオートマトンについて可能なものとするために，まず，オートノーマスなオートマトンについて，それが，非自明な自己同型群を有する条件につき，考察を加えた。

また，自明な自己同型群については，状態分割の手法を用いることにより，非自明な自己同型群を有する等価なオートマトンの構成できることを示した。

一般のオートマトンの自己同型群は，それの，各々の入力記号で定義されるオートノーマスなオートマトンの自己同型群の全ての交わりの自己同型群によって，原理的には求められるが，それの詳しい構造は，いまのところ，さだかでない。

また，状態分割の分割数には，多分に任意性があるが，これは，一様分解の可制御性に結びつけることもできるので，この方面からの検討も，残された問題である。

(昭和47年5月20日受理)

文献

1) J. R, Jump: "A Note on the Iterative Decomposition of Finite Automata" Inf. & Cont. 15, p. 424-435, 1969.

2) A. Paz: "Whirl Decomposition of Stochastic System" IEEE Trans on Computers, p. 1208–1210, Oct. 1971.

3) A. C, Fleck: "On the Automorphism Group of an Automaton" J. ACM Vol. 12, No. 4, pp. 566–569, Oct. 1965.